Теоретические основы решения нестандартных и занимательных задач в курсе математики начальных классов

А.П. Тонких

Разумная занимательность на занятиях по математике имеет большую педагогическую ценность. Еще Блез Паскаль отмечал, что «предмет математики настолько серьезен, что полезно не упускать случаев делать его немного занимательным». При этом, говоря о занимательности, следует иметь в виду не развлечение школьников пустыми забавами, а занимательность содержания математических заданий либо формы, в которую они облекаются.

Начальный курс математики содержит большое количество задач занимательного характера: задачи на разрезание и составление фигур, задачи со спичками, ребусы, комбинаторные, логические задачи и др. Пронизаны ими буквально все темы основного курса и, конечно, внеклассные занятия. Вызвано это тем, что воспитание интереса младших школьников к математике, развитие их математических способностей невозможно без использования в учебном процессе задач на сообразительность, задач-шуток, математических фокусов, дидактических игр, стихов, задач-сказок, загадок и т.п.

Занимательные геометрические задачи способствуют формированию образно-геометрических схем мышления учащихся, логические задачи позволяют развить такие приемы мыслительной деятельности учащихся, как анализ, синтез, аналогия, обобщение, способствуют формированию навыков дедуктивных умозаключений. Внеклассная работа приносит большую пользу и самому учителю. Старая латинская пословица гласит: «Уча других, мы учимся сами». Чтобы успешно проводить внеклассную работу, учителю приходится постоянно освежать, расширять и углублять свои познания в области математики и ее истории, следить за новостями математической науки, что благоприятно сказывается на качестве его работы на уроке.

Наибольшие затруднения у школьников, как правило, вызывают решения нестандартных задач, т.е. задач, алгоритм решения которых им неизвестен. Однако одна и та же задача может быть стандартной или нестандартной в зависимости от того, обучал ли учитель решению аналогичных задач учащихся, или нет. Так, задачи на нахождение суммы конечного числа членов арифметической прогрессии для школьников начальных классов – нестандартные, а для старшеклассников – стандартные. Любая задача, взятая изолированно, сама по себе является нестандартной, но если с ней рядом поместить несколько подобных задач, то она становится стандартной. В основе решений многих из них лежат: принцип Дирихле, понятие инварианта, запись чисел в различных системах счисления, теория графов, свойства геометрических и магических фигур, правила построения уникурсальных кривых, признаки делимости чисел, законы математической логики и арифметических операций, правила комбинаторики и т.п. В данной статье мы рассмотрим теоретические основы решения задач, в основе которых лежат вышеперечисленные понятия, законы и теории.

Предлагаемая статья призвана усилить не только логико-математическую, но и профессиональную подготовку учителя: умение решать подобные задачи повышает математическую культуру учителя, а занимательный материал рассматривается современной педагогикой как одно из средств, обеспечивающих эффективность обучения математике младших школьников.

Некоторые материалы статьи могут без соответствующей доработки использоваться в начальной школе – как на уроках математики, так и во внеклассной работе: на занятиях математических кружков, при проведении математических утренников, викторин, олимпиад, выпуске математических газет, оборудовании уголка математики и т.п. Другие (более сложные для восприятия школьниками начальных классов) послужат учителю теоретической основой умения решать аналогичные (несложные) задачи, встречающиеся в курсе математики начальных классов.

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ. Это чрезвычайно простое положение применяется при доказательстве многих важных теорем теории чисел. В самой простой и шутливой форме принцип Дирихле выглядит так: «Если в n клетках сидит не менее $m + 1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит не менее двух кроликов». Более строго он формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1 *(принцип Дирихле).* Пусть дано n классов и m предметов. Если $m > n$, то при отнесении каждого из m предметов к одному из n классов хотя бы в один класс попадет не менее двух предметов.

Доказательство проведем методом от противного. Если бы в каждый класс попадало не более одного предмета, то всего в рассматриваемых классах было бы не более n предметов, что противоречило бы условию ($m > n$). Теорема доказана.

Пример 1. В мешке лежат шарики двух разных цветов: черного и белого. Какое наименьшее число шариков нужно вынуть из мешка вслепую так, чтобы среди них оказались два шарика одного цвета?

Решение. Достанем из мешка три шарика. Если бы среди этих шариков было не более одного шарика каждого из двух цветов, то всего было бы не более двух шаров – это очевидно и противоречит тому, что мы достали три шарика. С другой стороны, ясно, что двух шариков может и не хватить.

В этой задаче «кроликами» являются шарики, а «клетками» – цвета: белый и черный.

Ответ: 3 шарика.

Пример 2. Докажите, что в любой компании из 7 человек есть двое, имеющих одинаковое число знакомых в этой компании.

Доказательство. Вариантов числа знакомых всего 7: от 0 до 6. При этом если у кого-то 6 знакомых, то ни у кого не может быть 0 знакомых. Так что есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

Пример 3. Докажите, что равносторонний треугольник нельзя накрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.

Доказательство. Каждый из меньших треугольников не может накрывать более одной вершины большого треугольника, поэтому в силу принципа Дирихле равносторонний треугольник нельзя накрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.

Теорема 2 *(обобщенный принцип Дирихле).* Если в n классах находится не менее $k \cdot n + 1$ предметов, то в каком-то из данных классов есть по крайней мере $k + 1$ предмет.

Доказательство проведем методом от противного. Если бы в каждом классе было не более $k + 1$ предмета, то во всех классах было бы не более kn предметов, что противоречило бы условию. Теорема доказана.

Пример 4. В магазин привезли 25 ящиков с тремя разными сортами яблок (в каждом ящике яблоки только одного сорта). Докажите, что среди них есть по крайней мере 9 ящиков с яблоками одного и того же сорта.

Решение. 25 ящиков-«кроликов» рассадим по трем «клеткам»-сортам. Так как $25 = 3 \cdot 8 + 1$, то в силу теоремы 2 для $n = 3$, $k = 8$ и получим, что в какой-то «клетке»-сорте не менее 9 ящиков.

Пример 5. В квадрат со стороной 1 метр бросили 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратом со стороной 20 см.

Доказательство. Разобьем данный квадрат на 25 квадратов со стороной

25 см. По обобщенному принципу Дирихле в какой-то из них попадет по крайней мере три точки из 51 брошенной.

Теорема 3. Если сумма n чисел равна S, то среди них есть как число, не большее S/n, так и число, не меньшее S/n.

Доказательство следует из обобщенного принципа Дирихле.

Пример 6. Пятеро друзей получили за работу 1 550 рублей. Каждый из них хочет купить себе фотоаппарат ценой 320 рублей. Докажите, что кому-то из них не удастся это сделать.

Решение. Если бы каждый из друзей мог купить фотоаппарат, то у них в сумме было бы не менее $5 \cdot 320 = 1600$ рублей. Друзья получили 1 550 рублей, следовательно, по крайней мере один из них не сможет купить фотоаппарат.

Задачи в «математическую копилку учителя».

1. В лесу растет 700 000 елок. Известно, что на каждой из них не более 600 000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

2. Дано 7 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых делится на 6.

Указание. Остатки по модулю 6 – «клетки», числа – «кролики».

3. Пятнадцать мальчиков собрали 100 орехов. Докажите, что какие-то два из них собрали одинаковое число орехов.

Решение. Если это не так, то очевидно, что мальчики собрали не менее, чем 0+1+2+ ... +14 = 105 орехов – противоречие.

4. В классе 30 человек. Вова Иванов в диктанте сделал 13 ошибок, а остальные – меньше. Докажите, что по крайней мере 3 ученика сделали ошибок поровну (может быть, по 0 ошибок).

5. В ящике лежит сотня флажков – красные, зеленые, желтые и синие. Какое наименьшее число флажков надо взять, не глядя, чтобы среди них оказалось не меньше, чем десять одноцветных?

Ответ: 37 флажков.

ИНВАРИАНТ. Главная идея применения инварианта заключается в следующем. Берутся некие объекты, над которыми разрешено выполнять определенные операции, и задается вопрос: «Можно ли из одного объекта получить другой при помощи этих операций?». Чтобы ответить на него, строят некоторую величину, которая не меняется при указанных операциях. Если значения этой величины для двух указанных объектов не равны, то ответ на заданный вопрос отрицателен.

Пример 7. На доске написано 11 чисел – 6 нулей и 5 единиц. Предлагается 10 раз подряд выполнить такую операцию: зачеркнуть любые два числа и, если они были одинаковы, дописать к оставшимся числам один ноль, а если разные – единицу. Какое число останется на доске?

Решение. Нетрудно заметить, что после каждой операции сумма всех чисел на доске остается не четной, какой она и была вначале. Действительно, сумма каждый раз меняется на 0 или 2. Значит, и после 10 операций оставшееся число должно быть нечетным, т.е. равным 1.

Ответ: 1.

В этом примере инвариант – это четность суммы написанных чисел.

Главное в решении задач на инвариант – *придумать* сам инвариант. Это настоящее искусство, которым можно овладеть лишь при наличии известного опыта в решении подобных задач. Здесь важно не ограничивать фантазию. При этом следует помнить, что: а) придумываемые величины должны быть инвариантны; б) эти инварианты должны давать разные значения для двух данных в условии задачи объектов; в) необходимо сразу определить класс объектов, для которых будет определяться наша величина.

Пример 8. В алфавите языка племени УЫУ всего две буквы: У и Ы, причем этот язык обладает такими свойствами: если из слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ, то смысл слова не изменится. Точно так же смысл слова не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Можно ли утверждать, что слова УЫЫ и ЫУУ имеют одинаковый смысл?

Решение. Заметим, что при любой разрешенной операции добавления или выкидывания куска слова количества букв У и Ы в этом куске равны. Это означает, что разность между числом букв У и букв Ы в слове не изменяется (это инвариант). Проследим на примере: Ы → ЫЫУ → ЫУУЫЫЫУ → → ЫУЫЫУ. Во всех этих словах букв Ы на одну больше, чем букв У. В нашем случае в слове УЫЫ разность равна (−1), а в слове ЫУУ равна 1. Значит, из слова УЫЫ нельзя разрешенными операциями получить слово ЫУУ, и, следовательно, нельзя утверждать, что эти слова обязательно имеют одинаковый смысл.

Пример 9. В стране Серобуромалинии живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

Решение. В чем состоит описанная операция? В том, что «пропадают» два хамелеона двух разных цветов и «появляются» два хамелеона третьего цвета. Если догадаться о том, что величину – инвариант нужно определять по набору чисел (a, b, c), где a, b, c – количество серых, бурых и малиновых хамелеонов соответственно, то дальше решение получается почти сразу же. В самом деле, операция, описанная в условии, означает то, что из набора (a, b, c) получается набор $(a-1, b-1, c+2)$, или набор $(a-1, b+2, c-1)$, или набор $(a+2, b-1, c-1)$ – все зависит от того, в какой цвет перекрашиваются хамелеоны. Очевидно, что разности между числами набора либо не меняются, либо изменяются на 3, а значит, остатки этих разностей при делении на 3 не меняются – они инвариантны.

Но вначале $a - b = 13 - 15 = -2$, а в случае, если все хамелеоны малиновые, $a - b = 0 - 0 = 0$. Числа 0 и −2 имеют разные остатки при делении на 3, что и доказывает невозможность такого положения дел в стране. Аналогично разбираются и случаи, когда все хамелеоны стали серыми или все стали бурыми.

Пример 10. На плоскости расположено 11 шестеренок (рис. 1), соединенных по цепочке. Могут ли все шестеренки вращаться одновременно?

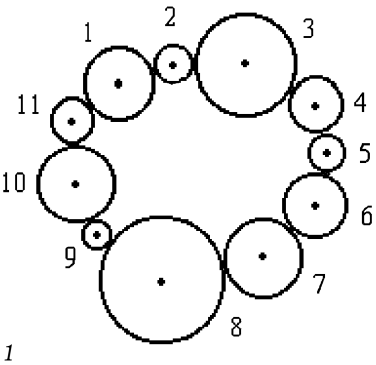
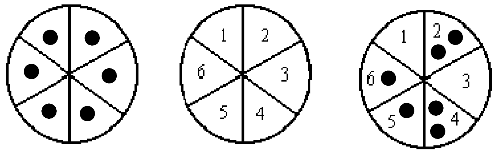


Рис. 1

Решение. Предположим, что первая шестеренка вращается по часовой стрелке. Тогда вторая шестеренка должна вращаться против часовой стрелки. Третья – снова по часовой, четвертая – против и т.д. Ясно, что «нечетные» шестеренки должны вращаться по часовой стрелке, а «четные» – против. Но тогда 1-я и 11-я шестеренки одновременно вращаются по часовой стрелке. Противоречие. Значит, шестеренки одновременно вращаться не могут.

Пример 11. Круг разделен на 6 секторов (рис. 2, *а*), в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?



а *б* *в*

Рис. 2

Решение. Занумеруем сектора по кругу числами от 1 до 6 (рис. 2, *б*) и для любой расстановки фишек рассмотрим следующую величину S – сумму номеров секторов, в которых стоят данные нам 6 фишек (с учетом кратности). Так, для расположения, показанного на рис. 2, *в*, имеем $S = 2 + 2 + 4 + 4 + 5 + 6 = 23$. Очевидно, что при сдвиге фишки в соседний сектор соответствующее ей слагаемое в сумме S меняет четность. Значит, если сдвигаются одновременно две фишки, то четность величины S не меняется – она инвариантна. Но для расстановки, показанной на рис. 2, *а*, $S = 21$. Если же все фишки находятся в одном секторе с номером n, то $S = 6n$ – это четное число (а 21 – число нечетное). Следовательно, из исходной расстановки нельзя получить расстановку, в которой все 6 фишек находятся в одном секторе.

Пример 12. В таблице 8 х 8 одна из клеток закрашена черным цветом, все остальные – белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

Решение. Легко заметить, что четность количества черных клеток при каждом перекрашивании не меняется – она инвариантна. Первоначально их было нечетное число (1 клетка), а если все клетки белые, то четных клеток 0 – четное число. Так что с помощью таких перекрашиваний нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми.

Пример 13. Конь вышел с поля a1 шахматной доски и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал четное число ходов.

Решение. Заметим, что при каждом ходе меняется цвет поля, на котором стоит конь. Следовательно, имеет место чередование цветов: черного и белого, т.е. инвариант – это цвет поля после двух последовательных ходов коня. Конь вышел с поля белого цвета, поэтому, чтобы попасть на поле белого цвета, он должен сделать четное число ходов.

Пример 14. На хоккейном поле лежат три шайбы A, B и C. Хоккеист бьет по одной из них так, что она пролетает между двумя другими. Так он делает 13 раз. Могут ли после этого шайбы оказаться на исходных местах?

Решение. Нет, не могут. Будем называть расположение шайб правильным, если, обходя вершины треугольника ABC в порядке $A - B - C$, получим обход по часовой стрелке, и неправильным в противном случае. Легко видеть, что при каждом ударе тип расположения меняется. После 13-го удара тип расположения будет другим по сравнению с первоначальным.

Задачи в «математическую копилку учителя».

6. Может ли конь пройти с поля a1 на поле h8 шахматной доски, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

Ответ: нет.

7. Можно ли составить магический квадрат из первых 36 простых чисел?

Ответ: нет.

8. На шести елках сидят шесть чижей, на каждой елке – по чижу. Елки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной елки на другую, то какой-то другой чиж обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все чижи собраться на одной елке? А если чижей и елок семь?

Ответ: нет.

9. В таблице 3 х 3 одна из угловых клеток закрашена черным цветом, все остальные – белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

10. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 1989. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них разность этих чисел. Можно ли добиться того, чтобы все числа на доске были нулями?

А если написаны числа 1, 2, 3, ..., 2002?

Ответ: нет.

11. На столе стоят 7 стаканов – все вверх дном. Разрешается за один ход перевернуть любые 4 стакана. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

Ответ: нет.

12. Можно ли разрезать шахматную доску без противоположных угловых клеток на прямоугольники из двух клеток разных цветов?

Ответ: нет.

МАГИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ. Этот вид головоломок мы можем встретить на страницах многих учебников математики для начальных классов.

Магические фигуры делятся на плоские и пространственные, так как существуют магические квадраты, треугольники, прямоугольники, многоугольники и круги, а также и магические кубы.

Магические (волшебные) квадраты – квадратные таблицы натуральных чисел (с одинаковым количеством строк и столбцов), имеющие одну и ту же сумму чисел по всем строкам, столбцам и диагоналям. Существуют различные классификации магических квадратов. Квадраты делятся – в зависимости от прогрессии, которую образуют числа, – на арифметические и геометрические; в зависимости от числа клеток вдоль противоположных его сторон – на нечетные (3, 5, 7, 9 и т.д.), нечетно-четные (6, 10, 14, 18 и т.д.) и четно-четные (4, 8, 12, 16 и т.д.); в зависимости от расстановки чисел в квадрате – на магические обычные, магические с особыми свойствами и сверхмагические (супермагические). Легко показать, что магических квадратов 2 х 2 нет. Существует только один магический квадрат 3 х 3 (остальные такие квадраты получаются из него поворотами и симметриями), магических квадратов 4 х 4 – 800, 5 х 5 – почти 250 тысяч. Однако до сих пор не найдена формула, по которой можно было бы найти количество магических квадратов данного размера.

Пример 15. На рис. 3,*а* показан простейший квадрат 3 х 3. На рис. 5, *а* – квадрат, который встречается впервые в гравюре «Меланхолия» известного немецкого художника Альбрехта Дюрера (1514 г.). Этот магический квадрат состоит из 16 клеток (4 х 4), заполненных натуральными числами от 1 до 16. Сумма чисел по каждой строке в нем, по каждому столбцу и каждой диагонали равна 34. Числа 15 и 14, стоящие в нижней строке квадрата, означают дату 1514 – год издания этой гравюры. Магический квадрат Дюрера замечателен еще другими свойствами: в нем число 34 выражает не только сумму чисел по каждой строке, каждому столбцу и каждой диагонали, но и этому числу равна сумма чисел, стоящих в квадратах из четырех клеток; расположенных внутри магического квадрата и при четырех его вершинах. Поэтому данный квадрат является сверхмагическим.

Отметим основные свойства магических квадратов.

Свойство 1. Магический квадрат останется магическим, если все числа, входящие в его состав, увеличить или уменьшить на одно и то же число.

Свойство 2. Магический квадрат останется магическим, если умножить или разделить все его числа на одно и то же число.

Пример 16. В квадрате на рис. 3, *а* магическая сумма равна 15; квадрат на рис. 3, *б* получается из него прибавлением 17 к каждому числу, его волшебная сумма равна 15 + 3·17 = 66; умножив все числа в новом квадрате на 2,

2	9	4
7	5	3
6	1	8

а

19	26	21
24	22	20
23	18	25

б

38	52	42
48	44	40
46	36	50

в

Рис. 3

2	9	4
7	5	3
6	1	8

а

+

19	26	21
24	22	20
23	18	25

б

=

21	35	25
31	27	23
29	19	33

в

Рис. 4

получим еще один квадрат (рис. 3, *в*), магическая сумма которого равна $2 \cdot 66 = 132$.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

а

14	7	1	12
9	4	6	15
8	13	11	2
3	10	16	5

12	7	1	14
15	4	6	9
2	13	11	8
5	10	16	3

5	10	16	3
15	4	6	9
2	13	11	8
12	7	1	14

б

Рис. 5

Свойство 3. Если квадрат является магическим для какой-нибудь арифметической прогрессии, то он будет магическим для так же расположенной арифметической прогрессии с другим первым членом и с другой разностью.

Так, в квадрате на рис. 3,*а* вместо чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 можно соответствующим образом разместить члены прогрессии 91, 96, 101, 106, 111, 116, 121, 126, 131.

Из свойств 1–3 следует важное практическое правило.

Правило. Составляя какой-либо магический квадрат, достаточно сначала составить его из простейших чисел, т.е. из чисел натурального ряда: 1, 2, 3, 4, 5,..., а затем путем умножения, деления, увеличения или же уменьшения этих чисел можно получить бесконечное число магических квадратов с самыми разнообразными магическими суммами.

Свойство 4. Из двух магических квадратов можно получить третий, складывая числа, расположенные в соответствующих полях. Магическая сумма такого квадрата равна сумме магических сумм обоих слагаемых: $81 = 15 + 66$ (см. рис. 4).

Свойство 5. Квадрат не утратит своих магических свойств, если переставить его столбцы и ряды, расположенные симметрично относительно центра квадрата.

Пример 17. На рис. 5,*б* в первом из этих квадратов переставили первый столбец и четвертый; получили второй квадрат, в котором сохранилась сумма членов в каждой строке и в каждом столбце, но не сохранилась сумма вдоль диагоналей. Если же теперь переставить во втором квадрате первую и четвертую строки, то получим третий квадрат, уже действительно магический.

Свойство 6. Магическая сумма в квадрате, составленном из арифметической прогрессии, равна половине суммы первого и последнего членов, умноженной на число боковых клеток квадрата.

Так, магическая сумма простейшего квадрата, состоящего из 9 полей, равна $\frac{1+9}{2} \cdot 3 = 15$, сумма магического квадрата Дюрера равна $\frac{1+16}{2} \cdot 4 = 34$.

Построение нечетных магических квадратов. Существует очень много различных методов построения магических квадратов. Среди них больше всего правил для составления нечетных квадратов и значительно меньше – для нечетно-четных квадратов. Приведенные ниже правила являются относительно самыми легкими и в то же время самыми интересными.

Индийский метод. Для примера возьмем квадрат седьмого порядка, т.е. состоящий из 49 клеток (рис. 6). Единицу ставим в клетке, находящейся непосредственно под центральной клеткой, и, начиная от нее, вправо вниз по диагонали вписываем дальнейшие члены натурального ряда чисел. Четверка окажется уже вне квадрата; переносим ее в соответствующее поле в квадрат. Пятерка выйдет тоже за квадрат, с ней поступим так же, как с четверкой. Дойдя таким образом до 7, мы наталкиваемся по пути на поле, уже занятое единицей. В этом случае мы ставим 8 под 7 двумя клетками ниже и продолжаем по тем же принципам вписывать дальнейшие числа, вплоть до 49. В результате получим квадрат с магической суммой 175.

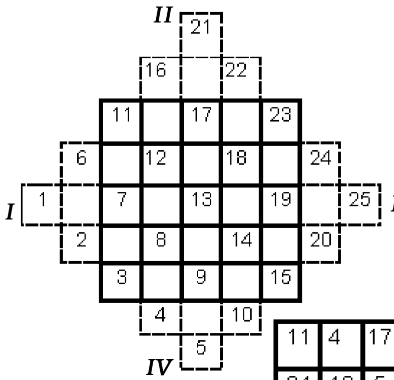
Сиамский метод. Первый член прогрессии ставится в центральной клетке верхнего ряда, а дальнейшие члены вписываются вправо вверх.

22	47	16	41	10	35	4	
5	23	48	17	42	11	29	5
30	6	24	49	18	36	12	30
13	31	7	25	43	19	37	13
38	14	32	1	26	44	20	38
21	39	8	33	2	27	45	21
46	15	40	9	34	3	28	46
22	47	16	41	10	35	4	
						29	

Рис. 6

Дальше нужно поступать по предыдущему методу, с тем лишь отличием, что если, например, семерка дойдет до занятого поля, то 8 вписывается не на две клетки ниже, а сразу же под семеркой.

Метод Баше основан на достраивании к квадрату четырех вспомогательных пирамидок со всех четырех его сторон, как это видно на примере квадрата с 25 клетками (рис. 7). Затем, начиная с какой-нибудь вершины одной из пирамидок и направляясь по линии, параллельной диагоналям квадрата, поочередно вписываем все 25 цифр, после чего цифры, находящиеся вне квадрата, переносятся в квадрат следующим образом: пирамидка I описывается вокруг поля, на котором расположено число 19, пирамидка II – вокруг поля, на котором расположено число 9, и т.д. В результате получим магический квадрат с суммой 65. Он



II
I

11	4	17	10	23
24	12	5	18	6
7	25	13	1	19
20	8	21	14	2
3	16	9	22	15

Рис.7

симметричен. Вдоль одной из диагоналей располагается прогрессия: 11, 12, 13, 14, 15, с числом 13 в центре, каждые два числа, расположенные симметрично по отношению к центру, в сумме дают 26, т.е. 2·13.

Латинский квадрат – квадрат n x n, в котором записаны числа 1, 2, 3, ..., n так, что в каждой строке и в каждом столбце встречаются все эти числа по одному разу. Магические и латинские квадраты – близкие родственники. Теория латинских квадратов нашла многочисленные применения как в самой математике, так и в ее приложениях (в физике, химии, технике, сельском хозяйстве и др.). Квадраты, показанные на рис. 8, – латинские.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

Рис.8

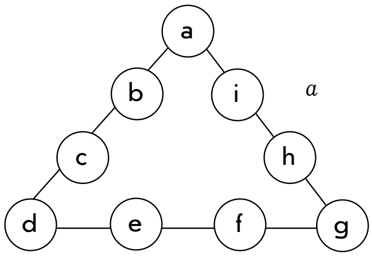
Треугольники с магическим периметром. Магический треугольник является одной из самых любопытных магических фигур.

Пример 18. Вместо приведенных на рис. 9, а букв так впишите натуральные числа от 1 до 9, чтобы сумма квадратов чисел, расположенных вдоль каждой стороны треугольника, была всегда одна и та же, т.е. чтобы

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = Q; & (1) \\ d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = Q; & (2) \\ g^2 + h^2 + i^2 + a^2 = Q. & (3) \end{cases}$$

Решение. Складывая эти три уравнения, мы получаем $a^2 + d^2 + g^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + i^2) = 3Q$. Сумма в скобках – это сумма квадратов натуральных чисел от 1 до 9. Как известно, сумма квадратов $S^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ выражается следующей формулой: $S^{(2)} = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$. Откуда при $n = 9$ получим $S^{(2)} = 285$. Значит, $a^2 + d^2 + g^2 + 285 = 2Q$; следовательно,

$$a^2 + d^2 + g^2 = 3(Q - 95). \qquad (4)$$



а

б

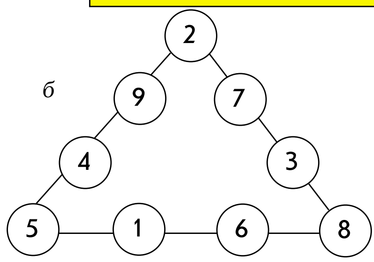


Рис.9

Заметим, что если целое число не делится на 3, то его квадрат имеет следующий вид: $3k + 1$. Если же сумма квадратов чисел a, d, g делится на 3, тогда возможны два случая:

1) каждое из чисел a, d, g делится на 3 (значит, это будут числа 3, 6, 9);

2) каждое из чисел a, d, g не делится на 3.

В случае 1) можно (не ограничивая при этом общности рассуждений) предположить, что $a = 3$, $d = 6$, $g = 9$. Но так как $a^2 + a^2 + g^2 = 126$, то формула (4) дает $126 = 3(Q - 95)$, откуда $Q = 137$. Тогда на основании (1) получаем $b^2 + c^2 = 92$. Так как сумма $b^2 + c^2$ – четное число, то b и c должны быть одновременно или четными, или нечетными; но, комбинируя всевозможными способами квадраты чисел 2, 4, 8 или квадраты чисел 1, 5, 7, мы не сможем получить такую комбинацию, при которой сумма этих двух квадратов $b^2 + c^2$ была бы равна 92. Следовательно, предположение 1) отпадает.

В предположении 2) рассуждаем следующим образом. Из формул (1), (2), (3) следует, что $(a^2 + d^2) + (b^2 + c^2) = (d^2 + g^2) + (e^2 + i^2) = (g^2 + a^2) + (h^2 + i^2)$. Но в этом случае каждая из сумм $a^2 + d^2$; $d^2 + g^2$; $g^2 + a^2$ дает при делении на 3 одинаковый остаток 2. Отсюда заключаем, что суммы $b^2 + c^2$; $e^2 + f^2$, $h^2 + i^2$ тоже дают одинаковые остатки. Нетрудно заметить, что в состав каждой суммы входит один квадрат, который делится на 3, и один, который на 3 не делится. Без ограничения общности, можем принять, что $b = 9^2 = 81$, $e = 6^2 = 36$, $h = 3^2 = 9$. Сравнивая формулу (1) с формулами (2) и (3), получаем

$$\begin{cases} a^2 + c^2 + 45 = f^2 + g^2; & (5) \\ c^2 + d^2 + 72 = g^2 + i^2, & (6) \end{cases}$$

где квадратами являются числа 1, 4, 16, 25, 49, 64.

Формула (6) может быть реализована только в тех случаях, если $g^2 + i^2 = 64 + 49 = 113$ и $c^2 + d^2 = 41 = 16 + 25$ или же если $g^2 + i^2 = 64 + 25 = 89$ и $c^2 + d^2 = 17 = 1 + 16$.

Рассмотрев еще ряд случаев, приходим к выводу, что уравнения (5) и (6) могут удовлетворяться только в том случае, если $g^2 = 64$, $c^2 = 16$, $a^2 = 4$, $f^2 = 1$, $d^2 = 25$, в результате получим треугольник такой, как рис. 9,*б*. Сразу же замечаем его неожиданное новое свойство, а именно то, что не только сумма квадратов чисел, расположенных вдоль отдельных сторон треугольника, но и сумма этих чисел тоже постоянна: 2+9+4+5 = 20, 5+6+1+8 = 20, 8+3+7+2 = 20. Следовательно, треугольник – магический вдвойне с магическими суммами 20 и 126.

Для треугольников, которые будут приведены ниже, вообще говоря, не существует методов построения, тем не менее они представляют собой очень любопытные фигуры, а различные видоизменения, особенно в примере 21, побуждают к самостоятельным изысканиям, которые неоднократно приводили к интересным результатам.

Пример 19. На рис. 10,*а* расположено 7 кругов в виде треугольника. Расположите в этих кругах числа от 1 до 7 так, чтобы сумма чисел по каждой прямой, содержащей 3 круга, была одна и та же.

Решение. Предположим, что числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 удовлетворяют условию задачи (рис. 10,*б*), а сумма чисел трех кругов равна S. Тогда имеет место система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = S, \\ x_1 + x_4 + x_7 = S, \\ x_2 + x_3 + x_4 = S, \\ x_5 + x_6 + x_7 = S, \\ x_1 + x_3 + x_6 = S, \end{cases}$$

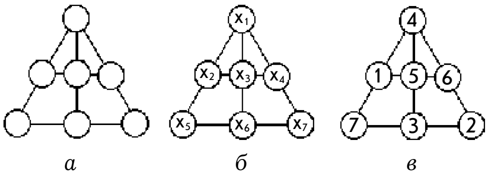


Рис.10

которая после несложных преобразований примет вид

$$\begin{cases} x_1 + S = 28, \\ 3S - 2x_1 = 28. \end{cases}$$

Решив последнюю систему, найдем $x_1 = 4$, $S = 12$. Выберем x_2 произвольно (пусть $x_2 = 1$), остальные значения неизвестных найдем из первой системы (рис. 10, *в*).

Пример 20. Даны концентрические треугольники (рис. 11). Все стороны внешнего треугольника составляют магическую сумму 45. Магическая сумма сторон внутреннего треугольника равна 80.

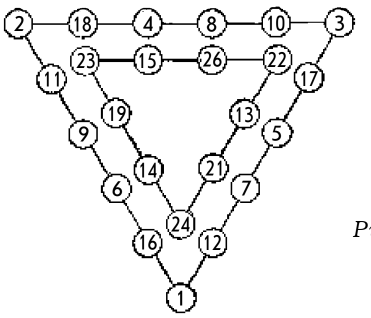


Рис.11

Пример 21. В треугольнике, показанном на рис. 12,*а*, пересеклись 3 треугольника (по 4 ячейки) и 3 трапеции (по 5 ячеек). Ячейки заполнены числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, что сумма чисел в каждом треугольнике равна 17, а в каждой трапеции – 28. Можно по-другому заполнить ячейки этими же числами от 1 до 9 так, чтобы сумма чисел в треугольниках стала равна 20, а в трапециях – 25 (рис. 12,*б*).

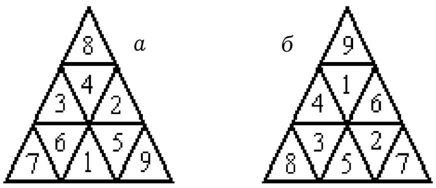


Рис.12

Магические круги. Простейший магический круг можно построить путем расстановки чисел в точках пересечения диаметров круга с концентрическими окружностями. На рис. 13,*а* три диаметра пересекаются тремя окружностями в 18 точках. Следовательно, в этих точках необходимо расставить 18 чисел натурального ряда от 1 до 18 таким образом, чтобы сумма чисел по окружности или диаметру была всегда одна и та же. Эта магическая сумма должна быть равна $\frac{18 \cdot (18+1)}{2} \cdot \frac{1}{3} =$ $= 57$. Выпишем ряд чисел от 1 до 18 следующим образом:

1 2 3 4 5 6 7 8 9
18 17 16 15 14 13 12 11 10

Сумма каждой пары равна 19, следовательно, достаточно вписывать числа так, чтобы каждые две симметричные точки в кругу были заняты одной парой; таким простым способом мы получим магические суммы чисел по окружности и диаметру.

Вместо трех диаметров можно начертить четыре диаметра при том же числе окружностей. Тогда точек пересечения будет $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Способ построения этого круга подобен предыдущему; однако необходимо поставить в центре круга вместо 0 число, которое представляет собой суммы этих пар ($24 + 1 = 25$; $23 + 2 = 25$, ...), расположенных в симметричных точках, так как вдоль окружности будет 4 такие пары, а вдоль диаметра – только 3 (рис. 13, *б*).

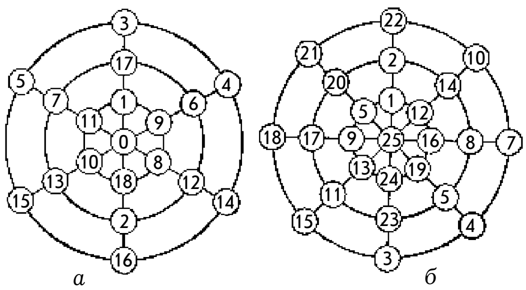


Рис.13

Задачи в «математическую копилку учителя».

13. Постройте магический квадрат 3 х 3, в котором расположите числа от

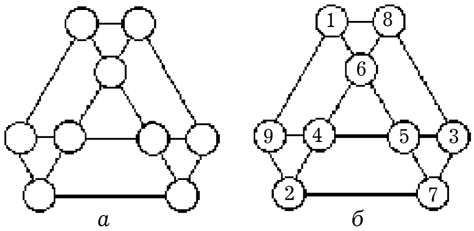
3 до 11 так, чтобы по всем строкам, столбцам и диагоналям была одна и та же сумма.

14. В квадрате 4 х 4 расставьте четыре одинаковых буквы так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждой диагонали встречалась только одна буква.

15. В квадрате 4 х 4 расставьте 16 букв (четыре буквы *a*, четыре *b*, четыре *c*, четыре *d*) так, чтобы в каждом горизонтальном ряду и в каждом вертикальном ряду буква встречалась только один раз, т.е. постройте так называемый латинский квадрат размером 4 х 4.

16. Переставьте числа в треугольнике, показанном на рис. 12, так, чтобы сумма чисел в каждом треугольнике (по 4 ячейки) стала равна 23, а в каждой трапеции (по 5 ячеек) – 22.

17. Задача Эйнштейна. Девять кругов расположены так, как показано на рис. 14,*а*. Расположите в них числа от 1 до 9 так, чтобы сумма чисел, лежащих в вершинах каждого из семи изображенных на рисунке треугольников, была одна и та же.



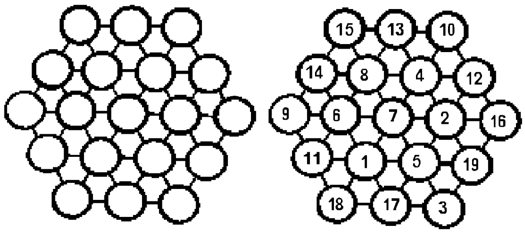
а *б*

Рис.14

Ответ показан на рис. 14,*б*.

18. Заполните числами кружки так, чтобы сумма чисел в каждом ряду была равна 38 (рис. 15,*а*).

Ответ показан на рис. 15,*б*.



а *б*

Рис.15

Александр Павлович Тонких *– канд. физ.-мат. наук, доцент Брянского государственного университета.*